احتمال مهندسی
فصل چهارم: متغیر تصادفی گسسته

سید مهدی سجادیه

فهرست مطالب

- ادامه مسایل مربوط به احتمال شرطی
- معرفی متغیر تصادفی
- مثال‌های مربوط
- تعاریف تابع احتمال، تابع توزیع تجمعی، امید ریاضی، واریانس و ...

نکته مهم

- اگر $\mathbf{E}$ و $\mathbf{F}$ دو پیشامد ناسازگار باشند احتمال آنکه $\mathbf{E}$ قبل از $\mathbf{F}$ واقع شود برابر است با (مربوط به آخرین اسلاید درس قبل):

$$\frac{P(E)}{P(E)+P(F)}$$

مثال

فرض کنید در یک بازی دو نفر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ به ترتیب دو تاس همزمان را پرتاب می کنند. اگر $\mathbf{A}$ مجموع ۶ بیاورد برنده است. همچنین اگر $\mathbf{B}$ مجموع ۷ بیاورد برنده خواهد شد. اگر $\mathbf{A}$ شروع کننده بازی باشداحتمال برنده شدن $\mathbf{A}$ چقدر است؟

حل:

مثال

فرض کنید در یک بازی دو نفر **A** و **B** به ترتیب دو تاس همزمان را پرتاب می کنند. اگر **A** مجموع ۶ بیاورد برنده است. همچنین اگر **B** مجموع ۷ بیاورد برنده خواهد شد. اگر **A** شروع کننده بازی باشداحتمال برنده شدن **A** چقدر است؟

$$P(E6)=\frac{5}{36}$$

$$P(E7)=\frac{6}{36}$$

حل:

E6: پیشامد آنکه مجموع دو تاس برابر ۶ باشد

E7: پیشامد آنکه مجموع دو تاس برابر ۷ باشد

نکته: با توجه به اینکه به صورت جداگانه تاس ها پرتاب می شود از نکته صفحه قبل نمی توان استفاده نمود.

مثال

فرض کنید در یک بازی دو نفر A و B به ترتیب دو تاس همزمان را پرتاب می کنند. اگر A مجموع ۶ بیاورد برنده است. همچنین اگر B مجموع ۷ بیاورد برنده خواهد شد. اگر A شروع کننده بازی باشداحتمال برنده شدن A چقدر است؟

حل:

E6: پیشامد آنکه مجموع دو تاس برابر ۶ باشد

$$P(E6) = \frac{5}{36}$$

E7: پیشامد آنکه مجموع دو تاس برابر ۷ باشد

$$P(E7) = \frac{6}{36}$$

نکته: با توجه به اینکه به صورت جداگانه تاس ها پرتاب می شود از نکته صفحه قبل نمی توان استفاده نمود.

CA: پیشامد پیروزی A

FA : پیشامد پیروزی A در پرتاب اول

$$P(FA) = \frac{5}{36}$$

FB : پیشامد پیروزی Bدر پرتاب اول

$$P(FB) = \frac{31}{36} * \frac{6}{36} = \frac{31}{216}$$

FN:پیشامد عدم پیروزی هر دو در پرتاب اول

$$P(FN) = \frac{31}{36} * \frac{30}{36} = \frac{155}{216}$$

ادامه مثال

- با مشروط کردن روی پرتاب اول داریم:

$$P(CA) = P(CA \mid FA)P(FA) + P(CA \mid FB)P(FB) + P(CA \mid FN)P(FN) =$$

ادامه مثال

- با مشروط کردن روی پرتاب اول داریم:

$$P(CA) = P(CA \mid FA)P(FA) + P(CA \mid FB)P(FB) + P(CA \mid FN)P(FN) =$$

$$\underbrace{P(CA \mid FA)P(FA)}_{1*\frac{5}{36}} + \underbrace{P(CA \mid FB)P(FB)}_{0*\frac{31}{216}} + \underbrace{P(CA \mid FN)P(FN)}_{P(CA)*\frac{155}{216}} =$$

$$\frac{5}{36} + P(CA)*\frac{155}{216}$$

$$\Rightarrow P(CA) = \frac{\frac{5}{36}}{1-\frac{155}{216}} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{61}{216}} = \frac{30}{61}$$

مثال

فرض کنید در یک بازی دو نفر **A** و **B** به ترتیب دو تاس همزمان را پرتاب می کنند. اگر **A** مجموع ۶ بیاورد برنده است. همچنین اگر **B** مجموع ۷ بیاورد برنده خواهد شد. اگر **B** شروع کننده بازی باشد احتمال برنده شدن **A** چقدر است؟

مثال

فرض کنید در یک بازی دو نفر A و B به ترتیب دو تاس همزمان را پرتاب می کنند. اگر A مجموع ۶ بیاورد برنده است. همچنین اگر B مجموع ۷ بیاورد برنده خواهد شد. اگر B شروع کننده بازی باشد احتمال برنده شدن A چقدر است؟

حل:

E6: پیشامد آنکه مجموع دو تاس برابر ۶ باشد

E7: پیشامد آنکه مجموع دو تاس برابر ۷ باشد

$$P(E6)=\frac{5}{36}$$

$$P(E7)=\frac{6}{36}$$

CA: پیشامد پیروزی A

FA : پیشامد پیروزی A در پرتاب اول

FB : پیشامد پیروزی B در پرتاب اول

FN: پیشامد عدم پیروزی هر دو در پرتاب اول

$$P(FA)=\frac{30}{36}*\frac{5}{36}=\frac{25}{216}$$

$$P(FB)=\frac{6}{36}$$

$$P(FN)=\frac{30}{36}*\frac{31}{36}=\frac{155}{216}$$

ادامه مثال

- با مشروط کردن روی پرتاب اول داریم:

$$P(CA) = P(CA \mid FA)P(FA) + P(CA \mid FB)P(FB) + P(CA \mid FN)P(FN) =$$

$$\underbrace{P(CA \mid FA)P(FA)}_{1*\frac{25}{216}} + \underbrace{P(CA \mid FB)P(FB)}_{0*\frac{6}{36}} + \underbrace{P(CA \mid FN)P(FN)}_{P(CA)*\frac{155}{216}} =$$

$$\frac{25}{216} + P(CA)*\frac{155}{216}$$

$$\Rightarrow P(CA) = \frac{\frac{25}{216}}{1-\frac{155}{216}} = \frac{\frac{25}{36}}{\frac{61}{216}} = \frac{25}{61}$$

ویژگی های احتمال شرطی

- احتمال شرطی تمام ویژگی های احتمال را دارد از جمله:

$$1)\ 0 \leq P(A \mid B) \leq 1$$

$$2)\ P(S \mid B) = 1$$

$3)\ A_1, A_2 \ldots, A_n$ ناسازگار $\Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \mid B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \mid B)$

ویژگی های احتمال شرطی

- احتمال شرطی تمام ویژگی های احتمال را دارد از جمله:

$$1)\ 0 \le P(A|B) \le 1$$

$$2)\ P(S|B) = 1$$

$$3)\ A_1, A_2 ..., A_n \text{ ناسازگار} \qquad \Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i | B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i | B)$$

- همچنین اگر **A1** و **A2** دو پیشامد مستقل به شرط **B** باشند در این صورت

$$P(A_1 \cap A_2 | B) = P(A_1 | B) P(A_2 | B)$$

مثال

- یک شرکت بیمه افراد جامعه را به دو دسته مستعد تصادف و غیر مستعد تصادف تقسیم نموده است. آمار این شرکت نشان می دهد هر فرد مستعد با احتمال ۰,۴ در سال تصادف می کند در حالی که برای فرد غیر مستعد این مقدار برابر ۰,۲ است. اگر 30% افراد جامعه مستعد تصادف باشند احتمال آنکه یک فرد بیمه شده در دو سال متوالی تصادف کند چقدر است؟

مثال

- یک شرکت بیمه افراد جامعه را به دو دسته مستعد تصادف و غیر مستعد تصادف تقسیم نموده است. آمار این شرکت نشان می دهد هر فرد مستعد با احتمال ۰,۴ در سال تصادف می کند در حالی که برای فرد غیر مستعد این مقدار برابر ۰,۲ است. اگر 30% افراد جامعه مستعد تصادف باشند احتمال آنکه یک فرد بیمه شده در دو سال متوالی تصادف کند چقدر است؟
- حل:
- A1: پیشامد تصادف برای فرد بیمه شده در سال اول
- A2: پیشامد تصادف برای فرد بیمه شده در سال اول
- B: مستعد تصادف
- B^c: غیر مستعد تصادف

مثال

- یک شرکت بیمه افراد جامعه را به دو دسته مستعد تصادف و غیر مستعد تصادف تقسیم نموده است. آمار این شرکت نشان می دهد هر فرد مستعد با احتمال ۰٫۴ در سال تصادف می کند در حالی که برای فرد غیر مستعد این مقدار برابر ۰٫۲ است. اگر 30% افراد جامعه مستعد تصادف باشند احتمال آنکه یک فرد بیمه شده در دو سال متوالی تصادف کند چقدر است؟
- حل:
- A1: پیشامد تصادف برای فرد بیمه شده در سال اول
- A2: پیشامد تصادف برای فرد بیمه شده در سال اول
- B: مستعد تصادف
- B^c: غیر مستعد تصادف

$$P(A1 \cap A2) = P(A1 \cap A2 \mid B)P(B) + P(A1 \cap A2 \mid B^c)P(B^c)$$

$$\overset{\text{استقلال}}{=} P(A1 \mid B)P(A2 \mid B)P(B) + P(A1 \mid B^c)P(A2 \mid B^c)P(B^c)$$

$$= 0.4 * 0.4 * 0.3 + 0.2 + 0.2 + 0.7 =$$

$$0.048 + 0.028 = 0.076$$

مثال

- یک شرکت بیمه افراد جامعه را به دو دسته مستعد تصادف و غیر مستعد تصادف تقسیم نموده است. آمار این شرکت نشان می دهد هر فرد مستعد با احتمال ۰,۴ در سال تصادف می کند در حالی که برای فرد غیر مستعد این مقدار برابر ۰,۲ است. اگر 30% افراد جامعه مستعد تصادف باشند احتمال آنکه یک فرد بیمه شده سال دوم تصادف کند به شرط آنکه در سال اول تصادف کرده باشد چقدر است؟

مثال

- یک شرکت بیمه افراد جامعه را به دو دسته مستعد تصادف و غیر مستعد تصادف تقسیم نموده است. آمار این شرکت نشان می دهد هر فرد مستعد با احتمال ۰٫۴ در سال تصادف می کند در حالی که برای فرد غیر مستعد این مقدار برابر ۰٫۲ است. اگر 30% افراد جامعه مستعد تصادف باشند احتمال آنکه یک فرد بیمه شده سال دوم تصادف کند به شرط آنکه در سال اول تصادف کرده باشد چقدر است؟

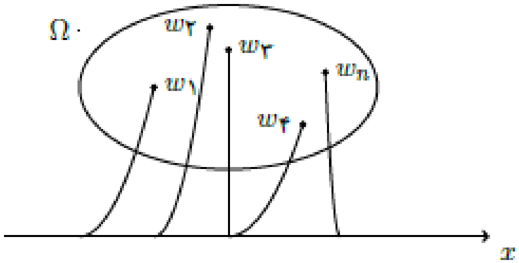
- حل:
- A1: پیشامد تصادف برای فرد بیمه شده در سال اول
- A2: پیشامد تصادف برای فرد بیمه شده در سال اول
- B: مستعد تصادف
- B^c: غیر مستعد تصادف

$$P(A2 \mid A1) = \frac{P(A1 \cap A2)}{P(A1)} = \frac{0.076}{0.26} = \frac{76}{260} = \frac{19}{65}$$

متغیر تصادفی

تعریف

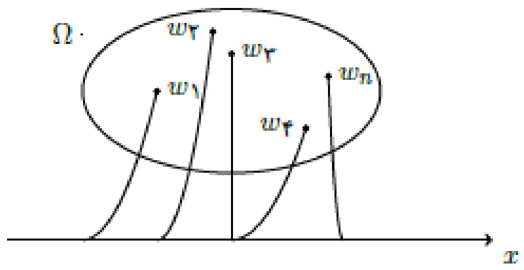
- متغیر تصادفی:
  - تابعی که فضای نمونه را به اعداد حقیقی نگاشت می کند



- قرارداد
- متغیرهای تصادفی با حروف بزرگ نمایش داده می شود

تعریف

- متغیر تصادفی:
  - تابعی که فضای نمونه را به اعداد حقیقی نگاشت می کند



- قرارداد
- متغیرهای تصادفی با حروف بزرگ نمایش داده می شود

- تابع احتمال:
- در متغیر تصادفی (گسسته)، به میزان احتمال در هر نقطه تابع احتمال گفته می شود
- نمایش با $P_X\{X=x\}$ که X متغیر تصادفی و x یک عدد حقیقی
- نکته مهم

$$\sum_{x:P_X\{X=x\}>0} P(X=x)=1$$

مثال

- آزمایشی را در نظر بگیرید که در آن ۳ سکه سالم را پرتاب می کنیم. اگر X (متغیر تصادفی) تعداد شیرهای ظاهر شده در نظر گرفته شود تابع احتمال این متغیر تصادفی را محاسبه کنید.

مثال

- آزمایشی را در نظر بگیرید که در آن ۳ سکه سالم را پرتاب می کنیم. اگر X (متغیر تصادفی) تعداد شیرهای ظاهر شده در نظر گرفته شود تابع احتمال این متغیر تصادفی را محاسبه کنید.
- حل:
- X: تعداد شیرها
- نکته چون تعداد سکه ها ۳ تا است پس تعداد تعداد شیرها بین ۰ تا ۳ خواهد بود

$$P\{X=0\}=P\{(T,T,T)\}=\frac{1}{8}$$

$$P\{X=1\}=P\{(T,T,H),(T,H,T),(H,T,T)\}=\frac{3}{8}$$

$$P\{X=2\}=P\{(T,H,H),(H,T,H),(H,H,T)\}=\frac{3}{8}$$

$$P\{X=3\}=P\{(H,H,H)\}=\frac{1}{8}$$

مثال

آزمایشی را در نظر بگیرید که در آن دو تاس سالم را می‌ریزیم. متغیر تصادفی X را مجموع برآمدها در نظر می‌گیریم. مشخص‌است که X می‌تواند مقادیری از ۲ تا ۱۲ داشته‌باشد؛ یعنی: $۲ \leq X \leq ۱۲$. تابع احتمال برای این آزمایش به‌صورت زیر است:

k	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
$\Pr\{X = k\}$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۴}{۳۶}$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۶}{۳۶}$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۴}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$

مثال

آزمایشی را در نظر بگیرید که در آن دو تاس سالم را می‌ریزیم. متغیر تصادفی X را مجموع برآمدها در نظر می‌گیریم. مشخص‌است که X می‌تواند مقادیری از ۲ تا ۱۲ داشته‌باشد؛ یعنی: $۲ \le X \le ۱۲$. تابع احتمال برای این آزمایش به‌صورت زیر است:

k	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
$\Pr\{X = k\}$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۴}{۳۶}$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۶}{۳۶}$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۴}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$

در آزمایش قبل اگر X را ماکسیمم برآمد دو تاس در نظر بگیریم، تابع احتمال به‌صورت زیر است:

$$P\{X = 1\} = P\{(1,1)\} = \frac{1}{36}$$

$$P\{X = 2\} = P\{(1,2),(2,1),(2,2)\} = \frac{3}{36}$$

$$P\{X = 3\} = P\{(3,1),(1,3),(2,3),(3,2),(3,3)\} = \frac{5}{36}$$

$$\vdots$$

$$P\{X = 6\} = P\{(6,1),(1,6),(2,6),\ldots,(6,6)\} = \frac{11}{36}$$

مثال

- فرض کنید در کیسه ای ۲۰ توپ از شماره ۱ تا ۲۰ باشد. سه توپ از این کیسه بدون جایگذاری انتخاب می کنیم. اگر X ماکزیمم عدد بین سه توپ باشداحتمال آنکه X بیش از ۱۷ باشد را محاسبه کنید.

مثال

- فرض کنید در کیسه ای ۲۰ توپ از شماره ۱ تا ۲۰ باشد. سه توپ از این کیسه بدون جایگذاری انتخاب می کنیم. اگر X ماکزیمم عدد بین سه توپ باشداحتمال آنکه X بیش از ۱۷ باشد را محاسبه کنید.
- حل:
- X: ماکزیمم بین سه توپ $X \in \{3,4,\ldots,20\}$

$$P\{X > 17\} = P\{X = 18\} + P\{X = 19\} + P\{X = 20\}$$

مثال

- فرض کنید در کیسه ای ۲۰ توپ از شماره ۱ تا ۲۰ باشد. سه توپ از این کیسه بدون جایگذاری انتخاب می کنیم. اگر X ماکزیمم عدد بین سه توپ باشداحتمال آنکه X بیش از ۱۷ باشد را محاسبه کنید.
- حل:
- **X**: ماکزیمم بین سه توپ $X \in \{3,4,\ldots,20\}$

$$P\{X > 17\} = P\{X = 18\} + P\{X = 19\} + P\{X = 20\}$$

- برای محاسبه **P{X=18}** باید یکی از سه توپ برابر ۱۸ باشد و دو توپ دیگر از ۱۸ کمتر باشد

$$P\{X = 18\} = \frac{\binom{1}{1}\binom{17}{2}}{\binom{20}{3}}$$

مثال

- فرض کنید در کیسه ای ۲۰ توپ از شماره ۱ تا ۲۰ باشد. سه توپ از این کیسه بدون جایگذاری انتخاب می کنیم. اگر X ماکزیمم عدد بین سه توپ باشداحتمال آنکه X بیش از ۱۷ باشد را محاسبه کنید.
- حل:
- X: ماکزیمم بین سه توپ $X \in \{3,4,\ldots,20\}$

$$P\{X > 17\} = P\{X = 18\} + P\{X = 19\} + P\{X = 20\}$$

- برای محاسبه P{X=18} باید یکی از سه توپ برابر ۱۸ باشد و دو توپ دیگر از ۱۸ کمتر باشد

$$P\{X = 18\} = \frac{\binom{1}{1}\binom{17}{2}}{\binom{20}{3}}$$

- برای X=19,20 هم داریم:

$$P\{X = 19\} = \frac{\binom{1}{1}\binom{18}{2}}{\binom{20}{3}}, P\{X = 20\} = \frac{\binom{1}{1}\binom{19}{2}}{\binom{20}{3}}$$

مثال

- فرض کنید یک سکه را انقدر پرتاب می کنیم تا شیر بیاید و یا تعداد پرتاب برابر N شود. اگر X نشان دهنده تعداد پرتاب باشد و احتمال شیر آمدن سکه برابر p باشد آنگاه تابع احتمال متغیر تصادفی X را پیدا کنید.

مثال

- فرض کنید یک سکه را انقدر پرتاب می کنیم تا شیر بیاید و یا تعداد پرتاب برابر N شود. اگر X نشان دهنده تعداد پرتاب باشد و احتمال شیر آمدن سکه برابر p باشد آنگاه تابع احتمال متغیر تصادفی X را پیدا کنید.
- حل:
- X: مقادیر ۱و۲ و...و N خواهد بود:
- برای X بین ۱ تا N-1

$$P\{X=1\}=P\{(H)\}=p$$

$$P\{X=2\}=P\{(T,H)\}=(1-p)p$$

$$P\{X=3\}=P\{(T,T,H)\}=(1-p)^2 p$$

$$\vdots$$

$$P\{X=N-1\}=P\{(\underbrace{T,\ldots,T}_{N-2},H)\}=(1-p)^{N-2} p$$

مثال

- فرض کنید یک سکه را انقدر پرتاب می کنیم تا شیر بیاید و یا تعداد پرتاب برابر N شود. اگر X نشان دهنده تعداد پرتاب باشد و احتمال شیر آمدن سکه برابر p باشد آنگاه تابع احتمال متغیر تصادفی X را پیدا کنید.
- حل:
- X: مقادیر ۱و۲ و...و N خواهد بود:
- برای X بین ۱ تا N-1

$$P\{X=1\}=P\{(H)\}=p$$
$$P\{X=2\}=P\{(T,H)\}=(1-p)p$$
$$P\{X=3\}=P\{(T,T,H)\}=(1-p)^2 p$$
$$\vdots$$
$$P\{X=N-1\}=P\{(\underbrace{T,\ldots,T}_{N-2},H)\}=(1-p)^{N-2} p$$

- برای X=N هم داریم:

$$P\{X=N\}=P\{(\underbrace{T,\ldots,T}_{N-1},H),\underbrace{T,\ldots,T}_{N-1},T)\}=(1-p)^{N-1}p+(1-p)^{N-1}(1-p)$$
$$=(1-p)^{N-1}$$

تابع توزیع تجمعی

- تابع احتمال: میزان احتمال در هر نقطه

- تابع توزیع تجمعی ($F_X(a)$): مجموع احتمال از منفی بینهایت تا نقطه **a** یا

$$F_X(a) = P\{X \leq a\} = \sum_{x \leq a} P(X = x)$$

- دقت کنید $F_X(a)$ یک تابع احتمال است پس مقدار آن بین صفر تا یک است.

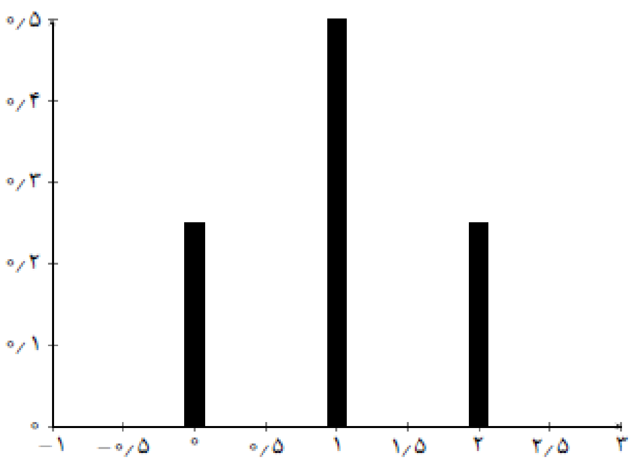
مثال

آزمایشی را در نظر بگیرید که در آن ۲ سکه‌ی سالم را پرتاب می‌کنیم. اگر در این آزمایش X را تعداد شیرهای رو آمده در نظر بگیریم، مقادیر X به‌ازای برآمدهای آزمایش و احتمال هر یک به صورت زیر خواهد بود:

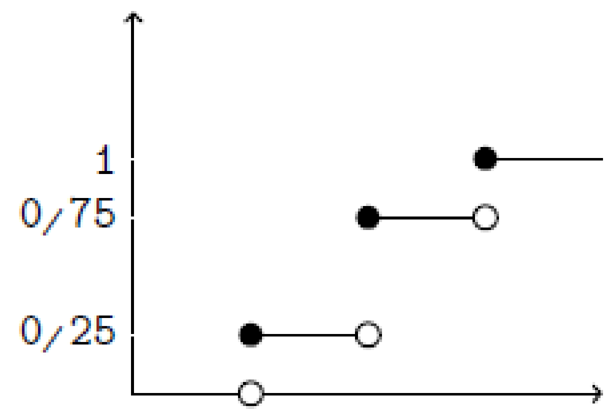
$$\Pr\{X = 0\} = \frac{1}{4}$$

$$\Pr\{X = 1\} = \frac{1}{2}$$

$$\Pr\{X = 2\} = \frac{1}{4}$$



تابع احتمال



تابع توزیع تجمعی

ویژگی های تابع توزیع تجمعی

- $F_X(a)$ یک تابع غیر نزولی است.
- از سمت راست پیوسته است
- حد در بینهایت و منفی بینهایت

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = ۱$$

$$\lim_{t\to-\infty} F(t) = ۰$$

- با توجه به تعریف تابع توزیع تجمعی داریم: (a^-: حد سمت چپ عدد a)

$$\Pr\{X = a\} = F(a) - F(a^-)$$

$$\Pr\{X \le a\} = F(a)$$

$$\Pr\{X > a\} = ۱ - F(a)$$

$$\Pr\{a < X \le b\} = F(b) - F(a)$$

$$\Pr\{X \ge a\} = ۱ - F(a^-)$$

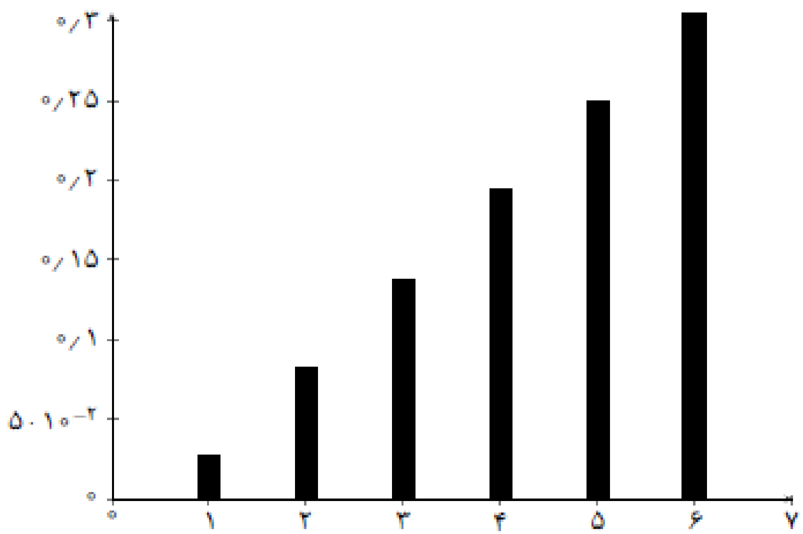
$$\Pr\{a \le X < b\} = F(b^-) - F(a^-)$$

$$\Pr\{a < X < b\} = F(b^-) - F(a)$$

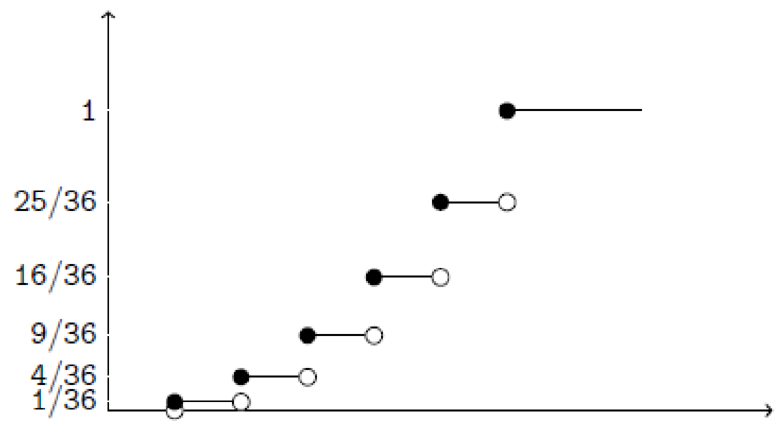
در نقاطی که احتمال غیر صفر است
پرش وجود دارد

مثال

- اگر در پرتاب دوتاس ماکزیمم دو مقدار پرتاب شده را در نظر بگیریم تابع احتمال و تابع توزیع تجمعی به صورت زیر خواهد بود



تابع احتمال



تابع توزیع تجمعی

مثال

- تابع احتمال یک متغیر تصادفی به صورت زیر است که α عدد مثبتی است.

$$P\{X = i\} = \frac{c\alpha^i}{i!}$$

الف) **c** را محاسبه کنید.

ب)**P{X>1}** را تعیین کنید.

مثال

- تابع احتمال یک متغیر تصادفی به صورت زیر است که α عدد مثبتی است.

$$P\{X=i\}=\frac{c\alpha^i}{i!}$$

الف) **c** را محاسبه کنید.

ب)**P{X>1** را تعیین کنید.

- حل:
- یادآوری

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{t^i}{i!}=e^t$$

- الف) مجموع احتمالها باید یک باشد پس داریم:

$$\sum_{i=0}^{\infty}P\{X=i\}=c\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\alpha^i}{i!}=ce^{\alpha}=1\Rightarrow c=\frac{1}{e^{\alpha}}=e^{-\alpha}$$

مثال

- تابع احتمال یک متغیر تصادفی به صورت زیر است که α عدد مثبتی است.

$$P\{X=i\}=\frac{c\alpha^i}{i!}$$

الف) c را محاسبه کنید.

ب) **P{X>1}** را تعیین کنید.

- حل:
- یادآوری

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{t^i}{i!}=e^t$$

- الف) مجموع احتمالها باید یک باشد پس داریم:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{c\alpha^i}{i!}=c\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\alpha^i}{i!}=ce^{\alpha}=1\Rightarrow c=\frac{1}{e^{\alpha}}=e^{-\alpha}$$

- ب)

$$P\{X>1\}=1-P\{X\le 1\}=1-(P\{X=0\}+P\{X=1\})$$

$$=1-(\frac{e^{-\alpha}\alpha^0}{0!}+\frac{e^{-\alpha}\alpha^1}{0!})=1-e^{-\alpha}(\alpha+1)$$

مثال

- اگر تابع توزیع تجمعی به صورت زیر باشد تابع احتمال را به دست آورید.

$$F_X(b) = \begin{cases} 0 & b < 0 \\ \dfrac{1}{2} & 0 \le b < 1 \\ \dfrac{3}{5} & 1 \le b < \dfrac{7}{3} \\ 1 & \dfrac{7}{3} \le b \end{cases}$$

مثال

- اگر تابع توزیع تجمعی به صورت زیر باشد تابع احتمال را به دست آورید.

$$F_X(b)=\begin{cases}0 & b<0\\ \frac{1}{2} & 0\le b<1\\ \frac{3}{5} & 1\le b<\frac{7}{3}\\ 1 & \frac{7}{3}\le b\end{cases}$$

- حل: همان طور که بیان شد فقط در نقاط نا پیوستگی احتمال غیر صفر وجود داردکه سه نقطه نا پیوستگی در این تابع است:

$$P\{X=0\}=P\{X=0\}-P\{X=0^-\}=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$$

$$P\{X=1\}=P\{X=1\}-P\{X=1^-\}=\frac{3}{5}-\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$$

$$P\{X=\frac{7}{3}\}=P\{X=\frac{7}{3}\}-P\{X=\frac{7}{3}^-\}=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$$

مثال

- اگر تابع توزیع تجمعی به صورت زیر باشد:

$$F_X(b) = \begin{cases} 0 & b < 0 \\ \dfrac{b}{4} & 0 \le b < 1 \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{b-1}{2} & 1 \le b < 2 \\ 1 & 2 \le b \end{cases}$$

مثال

- اگر تابع توزیع تجمعی به صورت زیر باشد:

$$F_X(b)=\begin{cases}0 & b<0\\ \dfrac{b}{4} & 0\le b<1\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{b-1}{2} & 1\le b<2\\ 1 & 2\le b\end{cases}$$

- الف) P{X=i},i=0,1,2 را محاسبه کنید. ب) P{0.5<X<1.6} را محاسبه کنید.
- حل: الف)

$$P\{X=0\}=P\{X=0\}-P\{X=0^-\}=\frac{0}{4}-0=0$$

-

$$P\{X=1\}=P\{X=1\}-P\{X=1^-\}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

$$P\{X=2\}=P\{X=2\}-P\{X=2^-\}=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

- دقت کنید مجموع احتمال در این مثال برابر یک نیست چون پیوسته است و پله ای نیست.

مثال

- اگر تابع توزیع تجمعی به صورت زیر باشد:

$$F_X(b)=\begin{cases}0 & b<0\\ \dfrac{b}{4} & 0\le b<1\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{b-1}{2} & 1\le b<2\\ 1 & 2\le b\end{cases}$$

- الف) P{X=i},i=0,1,2 را محاسبه کنید. ب) P{0.5<X<1.6} را محاسبه کنید.
- حل: الف)

$$P\{X=0\}=P\{X=0\}-P\{X=0^-\}=\frac{0}{4}-0=0$$

-

$$P\{X=1\}=P\{X=1\}-P\{X=1^-\}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

$$P\{X=2\}=P\{X=2\}-P\{X=2^-\}=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

- دقت کنید مجموع احتمال در این مثال برابر یک نیست چون پیوسته است و پله ای نیست.
- ب)

$$P\{0.5<X<1.6\}=P\{X=1.6^-\}-P\{X=0.5\}=\frac{1}{2}+\frac{1.6-1}{4}-\frac{0.5}{4}=\frac{21}{40}$$

سپاس